2.7.19 Nerovnice s neznámou pod odmocninou

Předpoklady: 2205, 2715

Pedagogická poznámka: Tato hodina patří mezi největší masakry během celého studia. Její obtížnost spočívá hlavně ve dvou věcech:
a) Je nutné, aby studenti uměli řešit kvadratické nerovnice (což je dva měsíce po jejich probrání poměrně odvážný požadavek).
b) Studenti si musí udržet přehled o tom, co a proč vlastně dělají.
Doporučuji dopředu upozornit studenty na nezbytnost rychlého řešení kvadratických nerovnic a toto upozornění ještě podepřít hrozbou nějaké znamínkové písemky.
Já osobně první část hodiny (úvodní rozbor a první dva lehké příklady) proberu o běžné hodině, další dva příklady pak studenti řeší zcela samostatně na cvičení. Většina z nich více nestihne (velká část nezvládne ani to), ti rychlejší pak mají k dispozici sbírku.
Jsem přesvědčen, že řešení těžších příkladů na tabuli nemá valný smysl, protože při možnosti opisování se studenti v samostatné orientaci v příkladu vůbec neprocvičí.
Při pomoci v lavici se vždy ptám na to, zda studenti vědí, u kterého bodu postupu jsou, co právě dělají a co jim právě vyšlo.

Př. 1: Jak se liší typický výsledek rovnice od typického výsledku nerovnice? Jaký důsledek bude mít tento rozdíl při řešení rovnic a nerovnic s neznámou pod odmocninou?

- Typický výsledek rovnice: jedno číslo (nebo několik čísel).
- Typický výsledek nerovnice: nekonečně mnoho čísel (interval).

$\Rightarrow$

Při řešení nerovnic s neznámou pod odmocninou nebudeme moci ověřovat pomocí zkoušky, zda získané hodnoty jsou skutečnými řešeními nebo jsou jen zdánlivé.

Př. 2: Jaký je zásadní rozdíl v úpravách používaných při řešení rovnic a při řešení nerovnic. Jaká nebezpečí hrozí při řešení nerovnic s neznámou pod odmocninou?

Zásadní rozdíl v úpravách:
Rovnice: při násobení (dělení) rovnice číslem nebo výrazem s neznámou musíme zabránit násobení nulou.
Nerovnice: při násobení (dělení) rovnice číslem nebo výrazem s neznámou, záleží na tom, zda násobíme kladným nebo záporným číslem (neobracíme nebo obracíme nerovnost).
$\Rightarrow$
Při umocňování nerovnic se neobejdeme budou hrát velkou roli znaménka výrazů na obou stranách nerovnice (umocňování je násobení samo sebou a bude tedy záležet, zda umocňuji kladné nebo záporné číslo).

Jak bychom řešili nerovnici $\sqrt{x^2+x+2} > x-3$?
Musíme dostat x zpod odmocniny $\Rightarrow$ potřebujeme nerovnici umocnit.
Co udělá umocnění s nerovností?

Stejně jako u rovnic záleží na znaménkách, které mají obě strany nerovnosti $\Rightarrow$ množinu všech reálných čísel budeme muset rozdělit na intervaly, ve kterých se znaménka ani jedné strany nerovnice nemění.
Jaké situace mohou v takovém intervalu $(a;b)$ nastat při řešení nerovnice ve tvaru $L > P$?

- **a) V intervalu $(a;b)$ jsou obě strany nerovnice kladné $L > 0$, $P > 0$.**

  $3 > 2 \quad /^2$

  $9 > 4$ To je pravda. Nerovnost se zachovává, z většího čísla získáme větší druhou mocninu $\Rightarrow$ **umocníme, nemusíme nic jiného dělat, vzniklou nerovnici vyřešíme.**
- **b) V intervalu $(a;b)$ jsou obě strany nerovnice záporné $L < 0$, $P < 0$.**

  $(-3) < (-2) \quad /^2$

  $9 < 4$ To není pravda. Menší záporné číslo, má větší absolutní hodnotu, po umocnění se znaménko ztratí $\Rightarrow$ **musíme umocnit a zároveň obrátit nerovnost, pak vyřešit vzniklou nerovnici**.
- **c) V intervalu $(a;b)$ mají obě strany nerovnice různá znaménka $L > 0$, $P < 0$.**

  Nemusíme nic počítat, je rozhodnuto.
  Platí: $L > 0$, $0 > P$ a tedy $L > P$ $\Rightarrow$ pokud má nerovnice má tvar $L > P$ (například zadání $\sqrt{x^2+x+2} > x-3$), nemusíme nic počítat, je rozhodnuto. Všechna čísla, pro která platí $L > 0$, $P < 0$, nerovnici vyhovují.
- **d) V intervalu $(a;b)$ mají obě strany nerovnice různá znaménka $L < 0$, $P > 0$.**

  Nemusíme nic počítat, je rozhodnuto.
  Platí: $L < 0$, $0 < P$ a tedy $L < P$ $\Rightarrow$ pokud má nerovnice tvar $L > P$ (například zadání $\sqrt{x^2+x+2} > x-3$), nemusíme nic počítat, je rozhodnuto, žádné číslo, pro které platí $L < 0$, $P > 0$, nerovnici nevyhovuje.

$\Rightarrow$ Řešení nerovnic s odmocninami nebude žádná sranda, musíme se dobře orientovat v tom, co vlastně děláme. Neobejdeme se bez podmínek a řešení nerovnic, které rozhodují o znaménkách jednotlivých stran.
Smůla: Zkouška nám příliš nepomůže, protože nemůžeme vyzkoušet dosazením nekonečně mnoho čísel.
$\Rightarrow$ Budeme postupovat ve třech krocích:

1. Uděláme podmínky pro odmocniny a zjistíme, pro která čísla nemůžeme do nerovnice dosazovat (s těmito čísly se nemusíme dál zabývat).
2. Zjistíme znaménka obou stran nerovnice (intervaly, kdy jsou strany kladné a kdy záporné).
3. V každém ze vzniklých intervalů podle rozboru uvedeného výše nerovnice umocníme a dořešíme, nebo rovnou napíšeme řešení.

Př. 3: Vyřeš nerovnici $2\sqrt{2x+3} > 7$.

1. podmínky pro odmocniny
Pod odmocninou musí být nezáporné číslo $\Rightarrow$ řešíme nerovnici $2x+3 \geq 0$.
$2x \geq -3$

$x \geq -\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ aby pod odmocninou nebylo záporné číslo, můžeme dosazovat pouze $x \in \left\langle -\frac{3}{2}; \infty \right)$.

2. znaménka
Levá strana: dvojnásobek odmocniny $\Rightarrow$ vždy nezáporná $L = +$.
Pravá strana: $P = 7$ - kladné číslo $P = +$.

3. řešení
Řešit můžeme pouze pro $x \in \left\langle -\frac{3}{2}; \infty \right)$. Pro všechna tato čísla platí: $L \geq 0 \quad P > 0 \Rightarrow$ obě strany nezáporné, nerovnici můžeme umocnit a nemusíme obracet nerovnost.

$2\sqrt{2x+3} > 7 \quad /^2$

$\left(2\sqrt{2x+3}\right)^2 > (7)^2$

$4(2x+3) > 49$

$8x + 12 > 49$

$8x > 37$

$x > \frac{37}{8}$

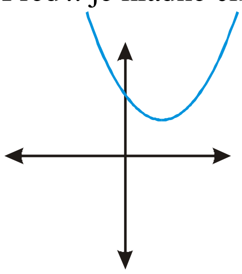
$K = \left(\frac{37}{8}; \infty\right)$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $\sqrt{x^2 + x + 2} > x - 3$.

1. podmínky
Pod odmocninou musí být nezáporné číslo $\Rightarrow$ řešíme nerovnici $x^2 + x + 2 \geq 0$.
Hledáme kořeny rovnice $x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$ $\Rightarrow$ rovnice $x^2 + x + 2 = 0$ nemá řešení.

Před x je kladné číslo – „ďolík“.



Nerovnice $x^2 + x + 2 \geq 0$ platí pro všechna $x \in R$, za x můžeme dosadit cokoliv a pod odmocninou bude kladné číslo.

2. znaménka

- Levá strana: odmocnina $\Rightarrow$ vždy nezáporná $L > 0$.

- Pravá strana: $P = x - 3$ - může být kladná i záporná.
  $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$
  $x \in \left(-\infty; 3\right\rangle \Rightarrow P \leq 0$ pravá strana záporná.
  $x \in \left\langle 3; \infty\right) \Rightarrow P \geq 0$ pravá strana kladná.

3. řešení

1. $x \in \left(-\infty; 3\right\rangle$: $L > 0 \quad P \leq 0 \quad \Rightarrow L > P$

To je to, co chceme $\Rightarrow$ $K_1 = \left(-\infty; 3\right\rangle$.

2. $x \in \left\langle 3; \infty\right)$: $L \geq 0 \quad P \geq 0$

Obě strany kladné, nerovnici můžeme umocnit a nemusíme obracet nerovnost.

$\sqrt{x^2 + x + 2} > x - 3 \quad /^2$

$\left(\sqrt{x^2 + x + 2}\right)^2 > (x - 3)^2$

$x^2 + x + 2 > x^2 - 6x + 9$
$7x > 7$
$x > 1$
$K_2 = \left\langle 3; \infty\right)$

$K = \left(-\infty; 3\right\rangle \cup \left\langle 3; \infty\right) = R$

Pedagogická poznámka: Najdou se tací, co už po dosazení do vzorce pro kvadratickou rovnici prohlásí, že nerovnice nemá řešení.
Velkým problémem je však zejména situace v intervalu $\left(-\infty; 3\right\rangle$, kdy se mnozí nedokážou srovnat s faktem, že už nemusí nic počítat a rovnou mohou napsat výsledek.

Pedagogická poznámka: Více o této hodině nespočítáme a zbytek zůstává na cvičení (čím dříve po hodině, tím lépe).

Pedagogická poznámka: Jak již bylo uvedeno na začátku hodiny, naprostá většina chyb vyvěrá z toho, že studenti nejsou schopni si udržet přehled o tom, co vlastně dělají, ve které části řešení příkladu se právě nacházejí a jaký význam má to, co právě spočítali. Proto se zabýváme hlavně tím, kde se nacházejí a jak si mají zapsat poznámky, aby se orientovali.

Pedagogická poznámka: Boj s následujícími dvěma příklady patří mezi ty výjimky, kdy opíšu zadání (u dvou příkladů to není problém) na tabuli a na projektoru nechávám řešení zobrazovat delší dobu.

Př. 5: Vyřeš nerovnici $\sqrt{x - x^2 + 12} < \sqrt{7 - 3x}$.

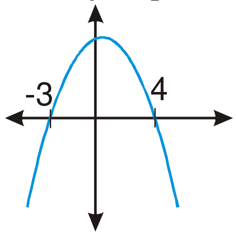
1. podmínky
Pod odmocninou musí být nezáporné číslo $\Rightarrow$

- **Levá strana:** řešíme nerovnici $-x^2 + x + 12 \geq 0$.
  Hledáme kořeny rovnice $-x^2 + x + 12 = 0 \Rightarrow$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot 12}}{2\cdot(-1)}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{-2}=\frac{1\pm 7}{2}$$

$x_1=4$, $x_2=-3$.

Před x je záporné číslo – „kopeček“ .



Do levé strany nerovnice můžeme dosazovat pouze $x\in\langle -3;4\rangle$.

- **Pravá strana:** řešíme nerovnici $7-3x\geq 0$.

  $7\geq 3x$

  $\frac{7}{3}\geq x$

  Do pravé strany nerovnice můžeme dosazovat pouze $x\in\left(-\infty;\frac{7}{3}\right\rangle$.

Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x\in\left\langle -3;\frac{7}{3}\right\rangle$.

2. znaménka

Levá strana: odmocnina $\Rightarrow$ vždy nezáporná $L\geq 0$

Pravá strana: odmocnina $\Rightarrow$ vždy nezáporná $P\geq 0$

3. řešení

Obě strany jsou nezáporné, nerovnici můžeme umocnit a nemusíme obracet nerovnost.

$\sqrt{x-x^2+12}<\sqrt{7-3x}\quad /^2$

$\left(\sqrt{x-x^2+12}\right)^2<\left(\sqrt{7-3x}\right)^2$

$x-x^2+12<7-3x$

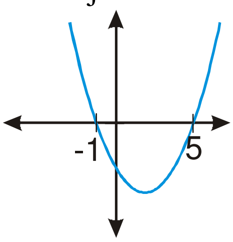
$0<x^2-4x-5$

Řešíme nerovnici $x^2-4x-5>0$.

Hledáme kořeny rovnice $x^2-4x-5=0 \Rightarrow x^2-4x-5=(x-5)(x+1)=0$

$x_1=5$, $x_2=-1$.

Před x je kladné číslo – „ďolík“ .



Řešením nerovnice $x^2-4x-5>0$ jsou $x\in(-\infty;-1)\cup(5;\infty)$.

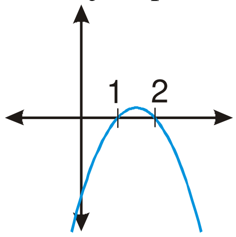
My jsme nerovnici řešili pouze pro $x\in\left\langle -3;\frac{7}{3}\right\rangle$.

Řešením nerovnice $\sqrt{x-x^2+12} < \sqrt{7-3x}$ je $K = \langle -3;-1)$.

Př. 6: Vyřeš nerovnici $3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x$.

1. podmínky
Pod odmocninou musí být nezáporné číslo. $\Rightarrow$

- **Levá strana**: řešíme nerovnici $3x-x^2-2 \geq 0$.
  Hledáme kořeny rovnice $3x-x^2-2=0 \Rightarrow x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$
  $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
  Před x je záporné číslo – „kopeček“.



Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \in \langle 1;2 \rangle$.

2. znaménka
Levá strana: odmocnina $\Rightarrow$ vždy nezáporná $L \geq 0$.
Pravá strana: $P = x$ - může být kladná i záporná.

- $x \in (-\infty;0\rangle \Rightarrow P \leq 0$ pravá strana záporná.
- $x \in \langle 0;\infty) \Rightarrow P \geq 0$ pravá strana kladná.

Nerovnici však řešíme pouze pro $x \in \langle 1;2 \rangle$, pro tato x je pravá strana vždy kladná.

3. řešení
Řešíme pouze pro $x \in \langle 1;2 \rangle$.
Obě strany jsou kladné, nerovnici můžeme umocnit a nemusíme obracet nerovnost.

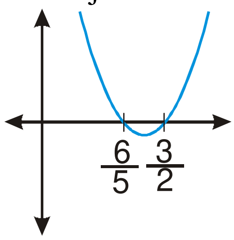
$$3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x \qquad /^2$$
$$\left(3\sqrt{3x-x^2-2}\right)^2 \geq (x)^2$$
$$3^2\left(\sqrt{3x-x^2-2}\right)^2 \geq x^2$$
$$9\left(3x-x^2-2\right) \geq x^2$$
$$27x-9x^2-18 \geq x^2$$
$$0 \geq 10x^2-27x+18$$

Řešíme nerovnici $10x^2-27x+18 \leq 0$.
Hledáme kořeny rovnice $10x^2-27x+18=0 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-27) \pm \sqrt{(-27)^2-4\cdot 10\cdot 18}}{2\cdot 10} = \frac{27 \pm \sqrt{9}}{20} = \frac{27 \pm 3}{20}$$

$$x_1 = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}, \quad x_2 = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

Před x je kladné číslo – „ďolík“.



Řešením nerovnice $10x^2 - 27x + 18 \le 0$ jsou $x \in \left\langle \frac{6}{5}; \frac{3}{2} \right\rangle$.

My jsme nerovnici řešili pouze pro $x \in \langle 1; 2 \rangle$.

Řešením nerovnice $3\sqrt{3x - x^2 - 2} \ge x$ je množina $K = \left\langle \frac{6}{5}; \frac{3}{2} \right\rangle$.

Př. 7: Petáková:
strana 14/cvičení 21 a) b) c) d)

Shrnutí: Před umocněním nerovnice musíme vědět, jaká znaménka mají její strany.